

Cadenas de Markov

Stalin Muñoz y David A. Rosenblueth

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS)
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Contenido

Contenido

- 1 Conceptos preliminares
- 2 Evolución temporal
- 3 Cadenas de Markov
- 4 Representación matricial

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \textit{cierto}, \text{puerta} = \textit{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.
- *medida de probabilidad* = función que asigna las probabilidades a los eventos.

Conceptos preliminares

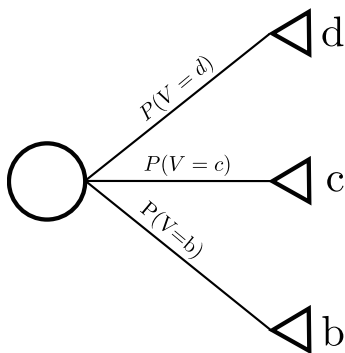
- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.
- *medida de probabilidad* = función que asigna las probabilidades a los eventos.
- *variable aleatoria* = una función real definida sobre un espacio muestral con medida de probabilidad.

Ejemplo: vagón en el que se encuentra un pasajero

- El vagón en el que se encuentra un pasajero del tren puede ser descrito por una variable aleatoria V que puede tomar tres valores posibles d (dormitorio), c (comedor) o b (bar).

Ejemplo: vagón en el que se encuentra un pasajero

- El vagón en el que se encuentra un pasajero del tren puede ser descrito por una variable aleatoria V que puede tomar tres valores posibles d (dormitorio), c (comedor) o b (bar).
- un pasajero al azar



$$\sum_i P(V = v_i) = 1$$

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Ejemplo: El vagón en que se encuentra el robot

- Observamos la ubicación de un pasajero cada minuto

$$\{V(\omega, t) : t = 7:00, 7:01, 7:02, \dots\}.$$

Ejemplo: El vagón en que se encuentra el robot

- Observamos la ubicación de un pasajero cada minuto

$$\{V(\omega, t) : t = 7:00, 7:01, 7:02, \dots\}.$$

- Una **trayectoria muestral** es una realización del proceso estocástico para un pasajero fijo ω_0 (robot detective):

$$V(\omega_0, 07:00) = d,$$

$$V(\omega_0, 07:01) = d,$$

$$V(\omega_0, 07:02) = c,$$

$$\vdots$$

o visto como una secuencia de estados:

$$V(\omega_0, \cdot) = d, d, c, \dots$$

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

- 1 el índice representa el tiempo, y

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

- 1 el índice representa el tiempo, y
- 2 la distribución de probabilidad para la variable aleatoria en el tiempo siguiente no depende de los valores que la variable tomó en tiempos pasados (únicamente del tiempo presente).

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

- 1 el índice representa el tiempo, y
- 2 la distribución de probabilidad para la variable aleatoria en el tiempo siguiente no depende de los valores que la variable tomó en tiempos pasados (únicamente del tiempo presente).

Cadena de Markov

Un proceso estocástico de Markov con un espacio de estados S discreto o un conjunto de índices T discreto.

Cadenas de Markov

Propiedad de Markov

Cuando tanto el tiempo como los estados son discretos:

$$P(X_{t+1}=s \mid X_1=s_1, \dots, X_t=s_t) = P(X_{t+1}=s \mid X_t=s_t)$$

Cadenas de Markov

Propiedad de Markov

Cuando tanto el tiempo como los estados son discretos:

$$P(X_{t+1}=s \mid X_1=s_1, \dots, X_t=s_t) = P(X_{t+1}=s \mid X_t=s_t)$$

- Una cadena de Markov se puede representar con un grafo dirigido $G(V, E)$ donde los vértices son los estados ($V = S$) y las aristas son transiciones de estado ($E = \{(a, b) : P(X_t=b|X_{t-1}=a) > 0\}$).

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Comenzamos por definir las variables de estado

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



d : dormitorio

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



b : bar

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

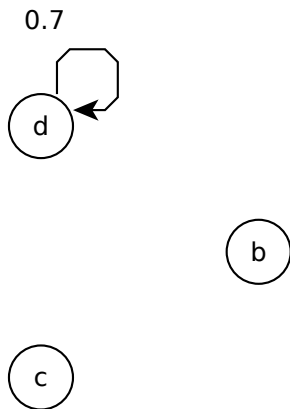
d

b

c : comedor

c

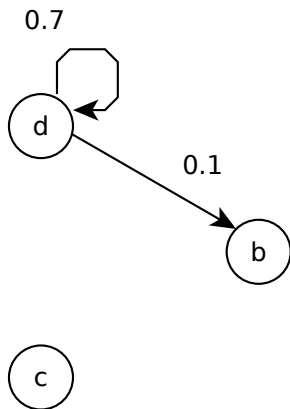
¿En qué vagón está un pasajero del tren?



Agregamos una arista para representar la posibilidad de que un pasajero que esta en el dormitorio en el tiempo t continúe en el dormitorio en el tiempo $t + 1$.

Etiquetamos con la probabilidad de que esto suceda $P(X_{t+1}=d \mid X_t=d)=0.7$

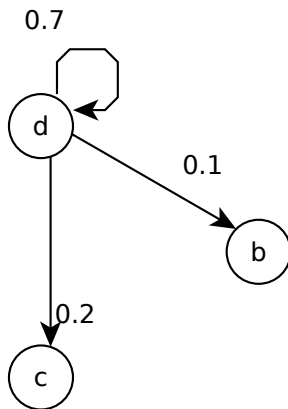
¿En qué vagón está un pasajero del tren?



Arista para la transición
del dormitorio al bar

$$P(X_{t+1}=b \mid X_t=d)=0.1$$

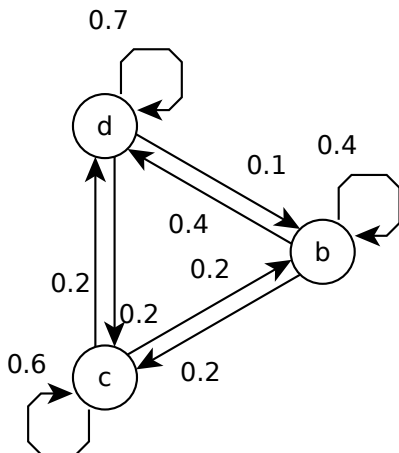
¿En qué vagón está un pasajero del tren?



Transición del dormitorio
al comedor

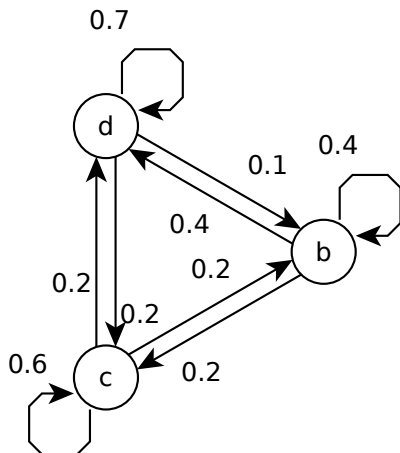
$$P(X_{t+1}=c \mid X_t=d)=0.2$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



Agregamos todas las transiciones posibles y sus probabilidades.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



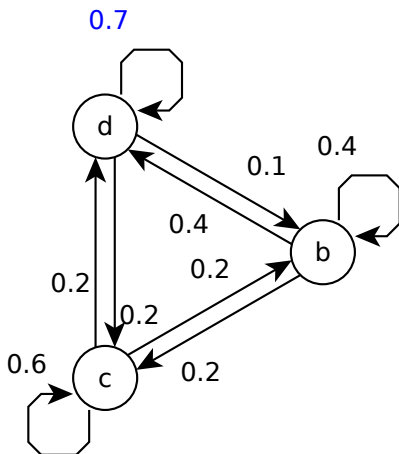
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



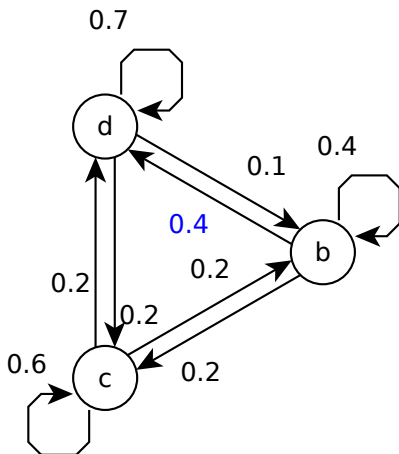
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



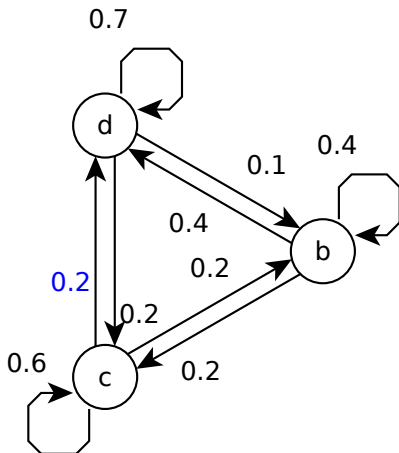
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



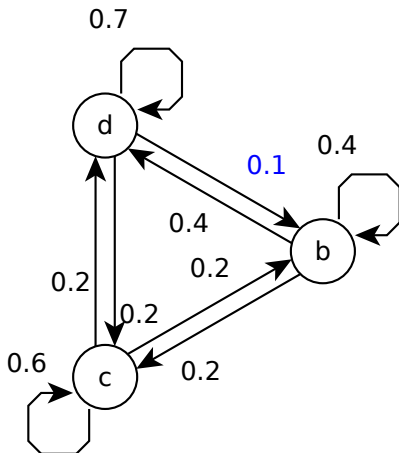
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



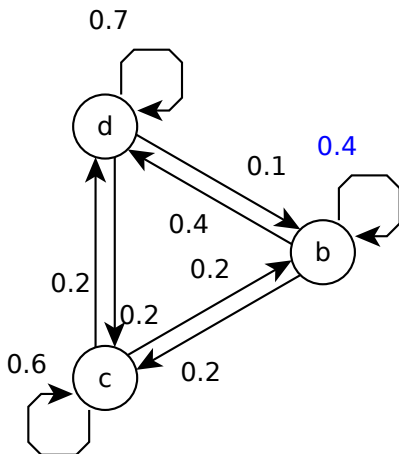
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



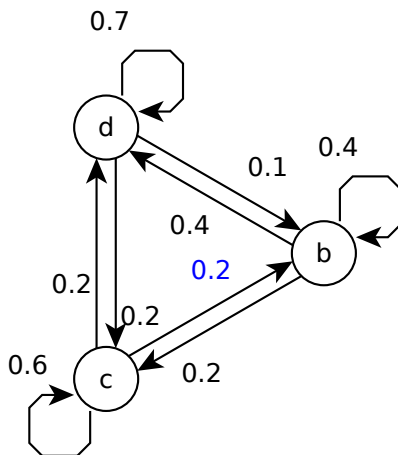
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



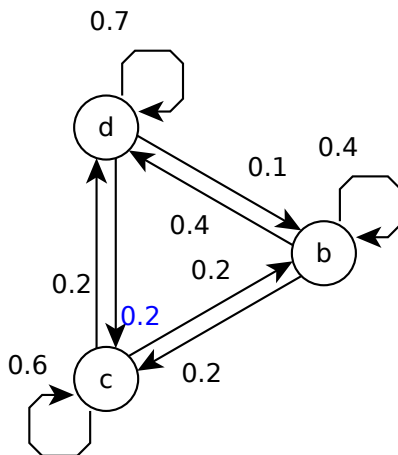
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & \textcolor{blue}{0.2} \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



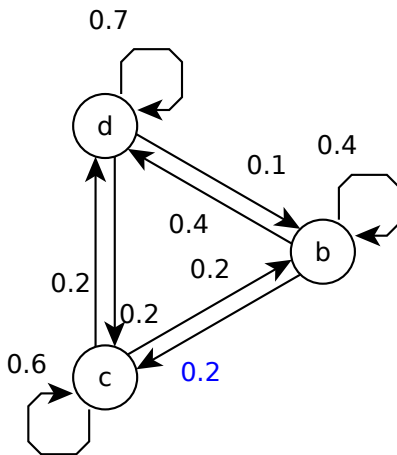
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ \textcolor{blue}{0.2} & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



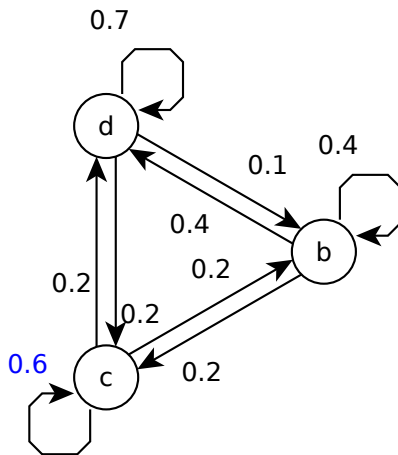
Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & \mathbf{0.2} & 0.6 \end{bmatrix}$$

con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



Las probabilidades de transición pueden representarse de manera matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

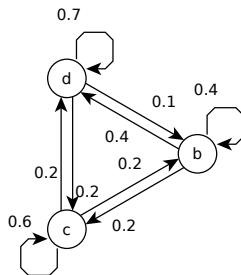
con entradas

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1}=i \mid X_t=j)$$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Si sabemos que el pasajero se encuentra en el dormitorio al tiempo $t = 0$:

$$P(X_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv P_0$$



Si sabemos que el pasajero se encuentra en el dormitorio al tiempo $t = 0$:

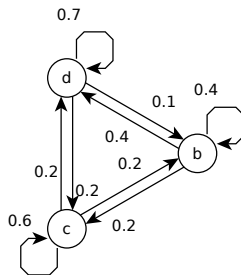
$$P(X_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv P_0$$

Al tiempo siguiente la distribución es:

$$P(X_1) = TP_0 \equiv P_1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P(X_t) = TP(X_{t-1}) \equiv P_t$$

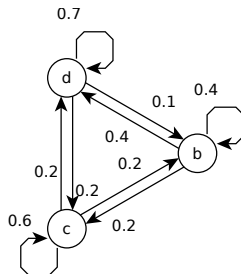
$$P_1 = TP_0$$

$$P_2 = TP_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.15 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

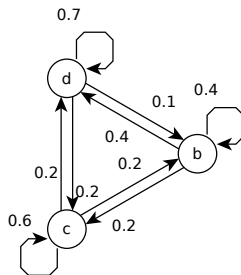
$$= TTP_0 = T^2P_0$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

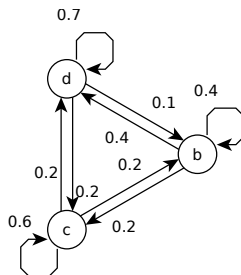


¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$



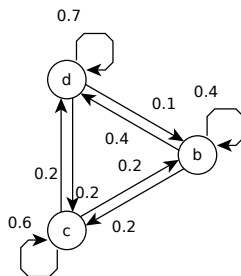
¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

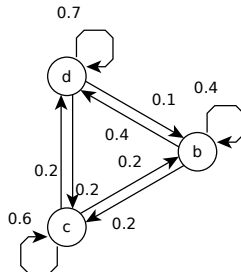
Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

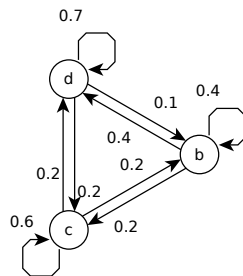
$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$

$$P_4 = [0.49 \quad 0.18 \quad 0.32]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

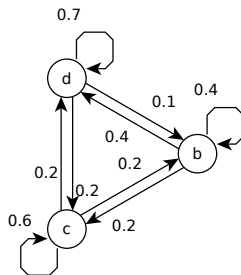
$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$

$$P_4 = [0.49 \quad 0.18 \quad 0.32]^T$$

$$P_{t \geq 5} = [0.48 \quad 0.19 \quad 0.33]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

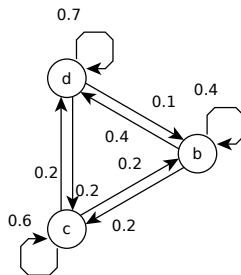
$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$

$$P_4 = [0.49 \quad 0.18 \quad 0.32]^T$$

$$P_{t \geq 5} = [0.48 \quad 0.19 \quad 0.33]^T$$



- La distribución converge.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

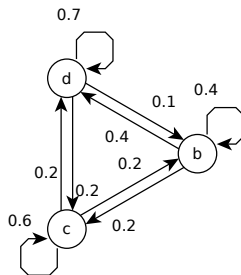
$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$

$$P_4 = [0.49 \quad 0.18 \quad 0.32]^T$$

$$P_{t \geq 5} = [0.48 \quad 0.19 \quad 0.33]^T$$



- La distribución converge.
- No importa la condición inicial.