

Cadenas de Markov

Stalin Muñoz y David A. Rosenblueth

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS)
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Contenido

Contenido

- 1 Conceptos preliminares
- 2 Evolución temporal
- 3 Cadenas de Markov
- 4 Representación matricial

Contenido

Hoy presentaremos un formalismo matemático para modelar variables aleatorias cuyo valor cambia con el tiempo.

- Conceptos preliminares
- Evolución temporal
- Cadenas de Markov
- Representación matricial

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$

- Estado = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$

Revisemos algunos conceptos importantes.

Entenderemos un estado como una asignación de valores para un conjunto de variables.

Por ejemplo:

Si llueve o no, si la puerta esta abierta o no, el número de pasajeros en un tren, etc.

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.

- Estado = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- Estado observable = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.

Para el propósito de este módulo, asumiremos que el estado es totalmente observable.

En otras palabras que puede conocerse con certidumbre.

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.

Conceptos preliminares

Lotería es otro nombre para un experimento del que no podemos anticipar el resultado.

- Estado = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- Estado observable = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- Lotería = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un espacio muestral.

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.
- *medida de probabilidad* = función que asigna las probabilidades a los eventos.

Conceptos preliminares

La medida de probabilidad garantiza que la suma de probabilidades de los eventos es 1. Nos permitirá cuantificar de manera consistente la incertidumbre.

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.
- *medida de probabilidad* = función que asigna las probabilidades a los eventos.

Conceptos preliminares

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.
- *medida de probabilidad* = función que asigna las probabilidades a los eventos.
- *variable aleatoria* = una función real definida sobre un espacio muestral con medida de probabilidad.

Conceptos preliminares

La variable aleatoria será nuestra mejor amiga.
 Una variable aleatoria toma valores a partir del resultado de una lotería.

- *Estado* = conjunto de asignaciones de valores para un conjunto de variables. Por ejemplo:
 $\{\text{lloviendo} = \text{cierto}, \text{puerta} = \text{abierta}, \text{pasajeros} = 237, \dots\}$
- *Estado observable* = que puede determinarse con certidumbre, por ejemplo, a través de una medición.
- *Lotería* = un experimento aleatorio en el que una variable toma un valor particular en un *espacio muestral*.
- *medida de probabilidad* = función que asigna las probabilidades a los eventos.
- *variable aleatoria* = una función real definida sobre un espacio muestral con medida de probabilidad.

Ejemplo: vagón en el que se encuentra un pasajero

- El vagón en el que se encuentra un pasajero del tren puede ser descrito por una variable aleatoria V que puede tomar tres valores posibles d (dormitorio), c (comedor) o b (bar).

Ejemplo: vagón en el que se encuentra un pasajero

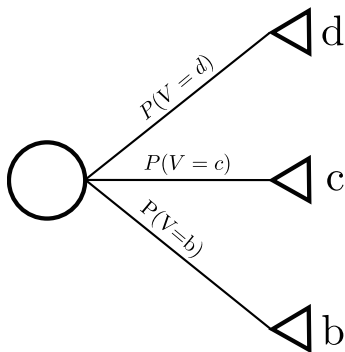
Imaginemos un tren de pasajeros operando, y que nos interesa conocer el vagón en el que viajan dichos pasajeros.

Para simplificar consideramos únicamente 3 vagones: el dormitorio, representado con la etiqueta d , el comedor (letra c), y el bar (letra b).

- El vagón en el que se encuentra un pasajero del tren puede ser descrito por una variable aleatoria V que puede tomar tres valores posibles d (dormitorio), c (comedor) o b (bar).

Ejemplo: vagón en el que se encuentra un pasajero

- El vagón en el que se encuentra un pasajero del tren puede ser descrito por una variable aleatoria V que puede tomar tres valores posibles d (dormitorio), c (comedor) o b (bar).
- un pasajero al azar



$$\sum_i P(V = v_i) = 1$$

Ejemplo: vagón en el que se encuentra un pasajero

Ahora seleccionamos aleatoriamente un pasajero.

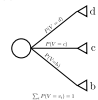
Del pasajero no nos interesa su identidad, sino únicamente el vagón en el que viaja.

Esto es una lotería,

La variable aleatoria que denominamos V puede tomar 3 valores posibles: cada una de las 3 etiquetas definidas.

Este diagrama de árbol ilustra cada salida en una rama etiquetada con la probabilidad correspondiente

- El vagón en el que se encuentra un pasajero del tren puede ser descrito por una variable aleatoria V que puede tomar tres valores posibles d (dormitorio), c (comedor) o b (bar).
- un pasajero al azar



$$\sum_i P(V = v_i) = 1$$

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

└ Proceso estocástico

Una herramienta matemática adecuada para describir la evolución temporal de variables aleatorias es un proceso estocástico:

una colección de variables que están ordenadas por un parámetro temporal.

La definición matemática es más general, pero para el tema que nos interesa es suficiente pensar al conjunto de índices como la variable temporal.

Los valores que toman las variables aleatorias son elementos de un espacio de estados S .

Podemos pensar que el estado S de la variable aleatoria X depende tanto de la realización de los eventos aleatorios con espacio muestral en Ω y del tiempo t .

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:

└ Proceso estocástico

El proceso más simple que podemos imaginar es un proceso de Bernoulli.

Pensemos por ejemplo en lanzar una moneda repetidas veces.

Las variables aleatorias serán la cara visible de la moneda tras cada volado, el espacio de estados es: *sol o águila*.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:

└ Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:

el primer estado de nuestra variable es águila.

Siguiente estado: sol.

Siguiente: águila.

Luego: águila otra vez.

Seguido por sol.

Otra vez sol.

Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:

Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



└ Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:

el primer estado de nuestra variable es águila.

Siguiente estado: sol.

Siguiente: águila.

Luego: águila otra vez.

Seguido por sol.

Otra vez sol.

Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



- Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:

el primer estado de nuestra variable es águila.

Siguiente estado: sol.

Siguiente: águila.

Luego: águila otra vez.

Seguido por sol.

Otra vez sol.

Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . $(X: \Omega \times T \rightarrow S)$

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces.



Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



- Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:
el primer estado de nuestra variable es águila.
Siguiendo estado: sol.
Siguiendo: águila.
Luego: águila otra vez.
Seguido por sol.
Otra vez sol.
Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . $(X: \Omega \times T \rightarrow S)$

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces.



Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



- Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:
el primer estado de nuestra variable es águila.
Siguiendo estado: sol.
Siguiendo: águila.
Luego: águila otra vez.
Seguido por sol.
Otra vez sol.
Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X: \Omega \times T \rightarrow S$)

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces.



Proceso estocástico

Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:

el primer estado de nuestra variable es águila.

Siguiente estado: sol.

Siguiente: águila.

Luego: águila otra vez.

Seguido por sol.

Otra vez sol.

Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



Un proceso estocástico formaliza matemáticamente el **cambio** (generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . ($X : \Omega \times T \rightarrow S$).

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces:



- Proceso estocástico

Lanzamos la moneda:

el primer estado de nuestra variable es águila.

Siguiente estado: sol.

Siguiente: águila.

Luego: águila otra vez.

Seguido por sol.

Otra vez sol.

Etcétera.

En un proceso de Bernoulli la probabilidad del estado siguiente es independiente del estado actual.

En modelos más ricos, puede establecerse una regla de evolución temporal.

(generalmente evolución temporal) de un sistema aleatorio.

Se define como una colección o ensamble de variables.

aleatorias indexadas por una variable t .

$$\{X(\omega, t) : t \in T, \omega \in \Omega\},$$

Las variables toman valores en un espacio de estados S que dependen a su vez del espacio muestral Ω . $(X: \Omega \times T \rightarrow S)$

- Ejemplo: Un proceso de Bernoulli. Secuencia binaria de eventos independientes. Lanzar una moneda repetidas veces.



Ejemplo: El vagón en que se encuentra el robot

- Observamos la ubicación de un pasajero cada minuto

$$\{V(\omega, t) : t = 7:00, 7:01, 7:02, \dots\}.$$

Ejemplo: El vagón en que se encuentra el robot

Consideremos el siguiente ejemplo:

Un tren inteligente desea conocer la ubicación del robot detective.

Como en nuestro ejemplo anterior, tenemos tres posibles vagones en los que se puede encontrar el pasajero.

Discretizamos la ubicación del robot en el tiempo tomando muestras cada minuto a partir de las 7:00 AM, horario de la corrida del tren.

No sabremos que sucede con la ubicación del robot en tiempos intermedios.

Esta es la era del internet de las cosas.

Ejemplo: El vagón en que se encuentra el robot

- Observamos la ubicación de un pasajero cada minuto

$$\{V(\omega, t) : t = 7:00, 7:01, 7:02, \dots\}.$$

- Una **trayectoria muestral** es una realización del proceso estocástico para un pasajero fijo ω_0 (robot detective):

$$V(\omega_0, 07:00) = d,$$

$$V(\omega_0, 07:01) = d,$$

$$V(\omega_0, 07:02) = c,$$

$$\vdots$$

o visto como una secuencia de estados:

$$V(\omega_0, \cdot) = d, d, c, \dots$$

Ejemplo: El vagón en que se encuentra el robot

A las 7:00 AM, quizá nuestro robot está en el vagón dormitorio.

A las 7:01 también.

Dos minutos después el robot se ha movido al vagón comedor.

Una realización de nuestro proceso aleatorio puede pensarse como una serie de tiempo para la variable V .

- Observamos la ubicación de un pasajero cada minuto

$$\{V(\omega, t) : t = 7:00, 7:01, 7:02, \dots\}.$$

- Una **trayectoria muestral** es una realización del proceso estocástico para un pasajero fijo ω_0 (robot detective):

$$V(\omega_0, 07:00) = d,$$

$$V(\omega_0, 07:01) = d,$$

$$V(\omega_0, 07:02) = c,$$

$$\vdots$$

o visto como una secuencia de estados:

$$V(\omega_0, \cdot) = d, d, c, \dots$$

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

Nos interesará un tipo particular de procesos estocásticos denominado "proceso estocástico de Markov".

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

- 1 el índice representa el tiempo, y

└ Procesos estocásticos de Markov

En este tipo de procesos el índice representa el tiempo,

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

- 1 el índice representa el tiempo, y
- 2 la distribución de probabilidad para la variable aleatoria en el tiempo siguiente no depende de los valores que la variable tomó en tiempos pasados (únicamente del tiempo presente).

Procesos estocásticos de Markov

2018-07-30

En un proceso estocástico de Markov:

- el índice representa el tiempo, y
- la distribución de probabilidad para la variable aleatoria en el tiempo siguiente no depende de los valores que la variable tomó en tiempos pasados (únicamente del tiempo presente).

y exhiben la propiedad de Markov en la cual la probabilidad de eventos futuros está condicionada únicamente al evento presente y no a eventos en tiempos del pasado.

Procesos estocásticos de Markov

En un proceso estocástico de Markov:

- 1 el índice representa el tiempo, y
- 2 la distribución de probabilidad para la variable aleatoria en el tiempo siguiente no depende de los valores que la variable tomó en tiempos pasados (únicamente del tiempo presente).

Cadena de Markov

Un proceso estocástico de Markov con un espacio de estados S discreto o un conjunto de índices T discreto.

Procesos estocásticos de Markov

2018-07-30

En un proceso estocástico de Markov:

- el índice representa el tiempo, y
- la distribución de probabilidad para la variable aleatoria en el tiempo siguiente no depende de los valores que la variable tomó en tiempos pasados (únicamente del tiempo presente).

Cadena de Markov

Un proceso estocástico de Markov con un espacio de estados S discreto o un conjunto de índices T discreto.

En particular, hoy trataremos con *cadena de Markov en tiempo discreto*, donde además los estados son finitos.

Cadenas de Markov

Propiedad de Markov

Cuando tanto el tiempo como los estados son discretos:

$$P(X_{t+1}=s \mid X_1=s_1, \dots, X_t=s_t) = P(X_{t+1}=s \mid X_t=s_t)$$

La propiedad de Markov nos dice que la probabilidad de que la variable aleatoria X se realice en el estado s en el tiempo siguiente, dada toda la historia de estados observados s_1, s_2 , hasta s_t es igual a la probabilidad de observar el estado s dado el estado en el tiempo presente s_t .

Es decir, podemos olvidar el pasado, pues éste no tiene repercusión en lo que sucederá en tiempos futuros.

Cadenas de Markov

Propiedad de Markov

Cuando tanto el tiempo como los estados son discretos:

$$P(X_{t+1}=s \mid X_1=s_1, \dots, X_t=s_t) = P(X_{t+1}=s \mid X_t=s_t)$$

- Una cadena de Markov se puede representar con un grafo dirigido $G(V, E)$ donde los vértices son los estados ($V = S$) y las aristas son transiciones de estado ($E = \{(a, b) : P(X_t=b|X_{t-1}=a) > 0\}$).

Cadenas de Markov

2018-07-30

$$P(X_{t+1}=s \mid X_1=s_1, \dots, X_t=s_t) = P(X_{t+1}=s \mid X_t=s_t)$$

- Una cadena de Markov se puede representar con un grafo dirigido $G(V, E)$ donde los vértices son los estados ($V = S$) y las aristas son transiciones de estado ($E = \{(a, b) : P(X_t=b|X_{t-1}=a) > 0\}$).

Una cadena de Markov puede representarse con un grafo dirigido donde los vertices son los estados y las aristas representan las transiciones de estado posibles.

Cada arista corresponde con una transición de estado donde la probabilidad es diferente de cero.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Comenzamos por definir las variables de estado

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Vamos a ilustrar una cadena de Markov para modelar la ubicación probabilística de un pasajero del tren.

Nos auxiliaremos de un diagrama de estados que representa el grafo de la cadena de Markov.

Identificamos los estados para este caso.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

d

d : dormitorio

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

El primer estado es el vagón dormitorio.

d

d : dormitorio

d

b

b : bar

└ ¿En qué vagón está un pasajero del tren?

El siguiente es el bar.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

(d)

©

b = bar

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

d

b

c : comedor

c

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

El siguiente el comedor.

d

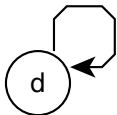
b

c : comedor

c

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

0.7



Agregamos una arista para representar la posibilidad de que un pasajero que esta en el dormitorio en el tiempo t continúe en el dormitorio en el tiempo $t + 1$.

Etiquetamos con la probabilidad de que esto suceda $P(X_{t+1}=d \mid X_t=d)=0.7$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Ahora bien,

las aristas dirigidas de nuestro grafo van a ilustrar la relación de parejas de estados presentes y futuros siempre que la probabilidad sea distinta de cero.

Si la probabilidad es cero, la arista no existe.

En nuestro ejemplo si el pasajero se encuentra en el vagón dormitorio la probabilidad de que en el minuto siguiente continúe en el dormitorio es igual 0.7.

Así dibujamos esta arista con origen y destino el nodo d.

Etiquetamos la arista con su *parámetro* o probabilidad de transición.

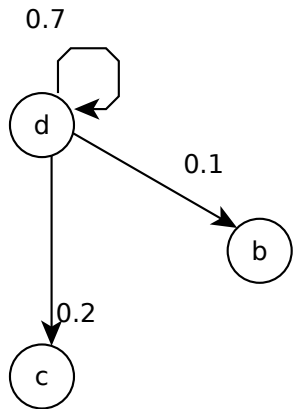
Formalmente la probabilidad de que en el tiempo $t + 1$ el estado sea el dormitorio dado que en el tiempo actual el estado es dormitorio es de 0.7.

0.7



Agregamos una arista para representar la posibilidad de que un pasajero que esta en el dormitorio en el tiempo t continúe en el dormitorio en el tiempo $t + 1$.
Etiquetamos con la probabilidad de que esto suceda $P(X_{t+1}=d \mid X_t=d)=0.7$

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



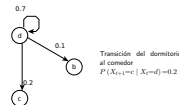
Transición del dormitorio
al comedor
 $P(X_{t+1}=c \mid X_t=d)=0.2$

Cadenas de Markov

└ Cadenas de Markov

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

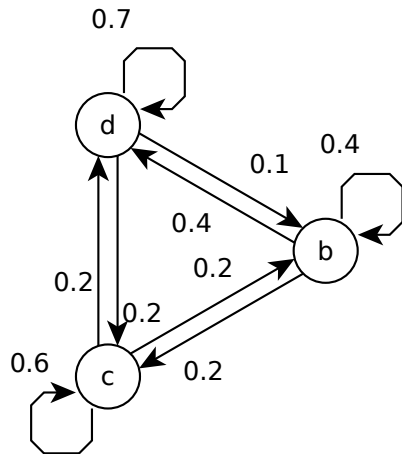
¿En qué vagón está un pasajero del tren?



Transición del dormitorio
al comedor
 $P(X_{t+1}=c \mid X_t=d)=0.2$

La transición del dormitorio al comedor con probabilidad 0.2.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?



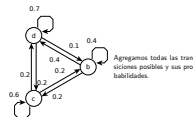
Agregamos todas las transiciones posibles y sus probabilidades.

Cadenas de Markov

└ Cadenas de Markov

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

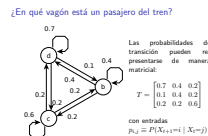
¿En qué vagón está un pasajero del tren?



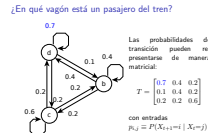
Agregamos todas las transiciones posibles y sus probabilidades.

Completamos el grafo.

La conveniencia de este diagrama de estados es que no representamos el tiempo de manera explícita, dado que las probabilidades son estacionarias.



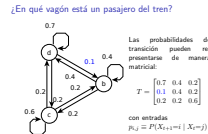
Matemáticamente, para describir la cadena de Markov es más adecuado utilizar una representación matricial.



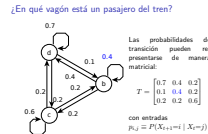
Entonces la entrada 1, 1 de la matriz es la probabilidad de que un agente en el estado d continúe en dicho estado al tiempo siguiente.

La entrada 1,2 es la probabilidad de transitar de b a d .

Observamos que el primer renglón define la probabilidad de cada una de las maneras de transitar al estado d .



2,1 la probabilidad de transitar de d a b .

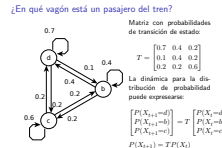


2,2 la probabilidad de estar y permanecer en b .

2,3 la probabilidad de transitar de c a b .

3,1 la probabilidad de transitar de d a c .

3,2 la probabilidad de transitar de b a c .



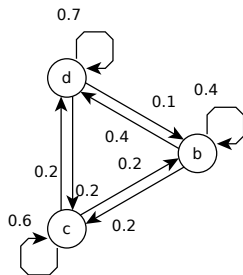


Si sabemos que el pasajero se encuentra en el dormitorio al tiempo $t = 0$:

$$P(X_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv P_0$$

Al tiempo siguiente la distribución es:

$$\begin{aligned}
 P(X_1) &= TP_0 \equiv P_1 \\
 P_1 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



└ ¿En qué vagón está un pasajero del tren?

2018-07

¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Si sabemos que el pasajero se encuentra en el dormitorio al tiempo $t = 0$:

$$P(X_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P_0$$

Al tiempo siguiente la distribución es

$$P(X_1) = TP_0 = P_1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$



Para tiempos futuros:

$$P(X_t) = TP(X_{t-1}) \equiv P_t$$

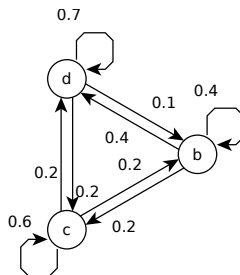
$$P_1 = TP_0$$

$$P_2 = TP_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.15 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

$$= TT P_0 = T^2 P_0$$



└ ¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Observamos que basta iterar la ecuación una vez más.

Esto es, una vez que obtenemos P_1 , P_2 se obtiene multiplicando T por P_1 .

En este caso el producto nos da el vector $[0.57, 0.15, 0.28]^T$

Observamos que si sustituimos P_1 por el producto matricial TP_0 entonces una expresión equivalente es elevar al cuadrado la matriz de probabilidades de transición y multiplicarla por la condición inicial.

¿En qué vagón está un pasajero del tren?
Para tiempos futuros:

$$P(X_t) = TP(X_{t-1}) \equiv P$$

$$P(X_t) = TP(X_{t-1}) \equiv P_t$$

$$P_1 = TP_0$$

$$P_2 = TP$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

[0.57]

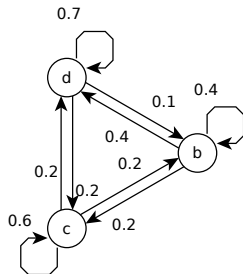
$$= \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.85 \end{bmatrix}$$

$[0.28]$









¿En qué vagón está un pasajero del tren?

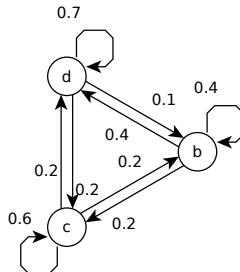
Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para $t = 3$.

Para tiempos futuros:

$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para tiempos futuros:

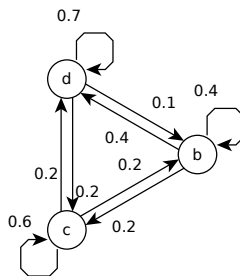
$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$

$$P_4 = [0.49 \quad 0.18 \quad 0.32]^T$$



¿En qué vagón está un pasajero del tren?

Para $t = 4$.

$$P_t = T^t P_0$$

$$P_1 = [0.7 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$$

$$P_2 = [0.57 \quad 0.15 \quad 0.28]^T$$

$$P_3 = [0.51 \quad 0.17 \quad 0.31]^T$$

$$P_4 = [0.49 \quad 0.18 \quad 0.32]^T$$





- La distribución converge.
- No importa la condición inicial.